

Définition

Un pourcentage est une grandeur exprimée sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est 100.

exemple : $20 \% = \frac{20}{100} = 0,2$

Appliquer un pourcentage

Un pourcentage représente une partie d'une quantité. Appliquer un pourcentage c'est multiplier une quantité par ce pourcentage

exemple : 20 % d'un groupe de 50 personnes c'est $50 \times \frac{20}{100}$ soit $\frac{50 \times 20}{100} = 10$ personnes

Tableau de proportionnalité

Lorsque 2 grandeurs sont proportionnelles on peut construire un *tableau de proportionnalité*.

Un pain pèse 400 grammes et coûte 2€. On peut dire que le prix du pain est proportionnel à sa masse. Pour chaque colonne on passe de la valeur du haut à la valeur du bas en multipliant par une grandeur, 200 (appelé coefficient de proportionnalité) et inversement on divise par le coefficient pour passer de la valeur du bas à celle du haut.

Prix	2	4
masse	400	800

Remarquez *l'égalité des produits « croisés »* ($2 \times 800 = 400 \times 4$).

On peut aussi faire les calculs sur les colonnes et non pas sur les lignes en multipliant par la même valeur (ici : 2)

On peut construire le tableau à l'infini

Prix	2	4	8	14
masse	400	800	1600	2800

Calculer un pourcentage

Un pourcentage représente une partie d'une tout. La façon la plus simple de calculer un pourcentage c'est diviser la valeur de cette partie par la valeur du tout (si bien sûr on nous fournit ces deux valeurs)

Exemple : sur un groupe de 75 personnes, 15 sont des enfants. Calculer le pourcentage d'enfants P dans ce groupe.

On connaît les 2 valeurs (la partie et le tout), on effectue la division 15 par 75 (le nombre d'enfants divisé par le nombre total de personnes dans le groupe)

$$\frac{15}{75} = 0,2 = \frac{20}{100} = 20 \%$$

Attention : si les deux valeurs sont exprimées avec une unité il doit s'agir de la **même** unité (sinon il faut faire la conversion).

Exemple : dans un kilogramme de mon gâteau j'ai mis 150 grammes de sucre. Quel est le pourcentage de sucre dans le gâteau ?

On connaît les 2 valeurs : la partie (150 g de sucre) et le tout (1 kg de gâteau). On doit donc diviser la valeur de la partie par la valeur du tout. **Mais** ces 2 valeurs ne sont pas exprimées dans la même unité (gramme et kilogramme). Ils faut donc convertir une des 2 valeurs.

1Kg = 1000 grammes

On peut alors diviser les 150 **g** de sucre par les 1000 **g** du gâteau

$$150 : 1000 = 15 : 100 = 15 \%$$

L'utilisation d'un tableau de proportionnalité permet aussi de calculer un pourcentage

Exemple : sur un groupe de 75 personnes, 15 sont des enfants. Calculer le pourcentage d'enfants **P** dans ce groupe.

On construit le tableau sachant que 75 représente 100% du groupe et qu'il y a 15 enfants dans le groupe.

personnes	75	15
%	100	P

On peut utiliser l'égalité des produits croisés pour trouver la solution

$$100 \times 15 = 75 \times P \rightarrow P = \frac{100 \times 15}{75} = 20$$

Le pourcentage d'enfants est donc **20 %** (même résultat que plus haut)

Autre exemple d'utilisation d'un tableau de proportionnalité lié aux pourcentages

21 enfants représentent 7% d'un groupe. Combien y-a-t-il de personnes dans le groupe ?

Le tableau

Pourcentages	7	100
personnes	21	N

Là encore on peut utiliser l'égalité des produits croisés pour trouver la solution

$$100 \times 21 = 7 \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} = \frac{100 \times 21}{7} = 300$$

Ou se demander à quoi est égal 1% (si 7% = 21 personnes alors 1% = 3 personnes) puis multiplier par 100

Pourcentages	21	1	100
personnes	7	3	300

Type de problème souvent posé :

Une cuve est remplie aux trois-quarts, il manque 100 litres pour qu'elle soit pleine. Combien y a-t-il d'eau dans la cuve ?

Si la cuve est remplie aux $\frac{3}{4}$ cela veut dire qu'il en manque $\frac{1}{4}$ pour qu'elle soit pleine. On nous dit que 100 litres représentent $\frac{1}{4}$ du contenu total de la cuve. Donc les $\frac{3}{4}$ correspondent à 3 fois 100 litres soit 300 litres.

remplissage	1 quart	3 quarts
litres	100	300

Quelle est la capacité totale de la cuve ?

remplissage	1 quart	4 quarts (soit la totalité)
litres	100	400

La cuve a une capacité totale de 400 litres

Refaites ce problème avec l'énoncé suivant (solution en bas de page)

Une cuve est remplie aux $\frac{2}{3}$, il manque 100 litres pour qu'elle soit pleine. Combien y a-t-il d'eau dans la cuve ?

Quelle est la capacité totale de la cuve ?

Echelle

Un plan à l'échelle 1/200 signifie que 1cm sur le plan représente 200 cm dans la réalité

plan	1	4
réalité	200	800

800 centimètres (8 m) dans la réalité sont représentés par 4 cm sur le plan.
Inversement 4 cm sur le plan représentent 800 centimètres dans la réalité.

Concentration

Types d'énoncé :

• **Une solution sucrée est dosée à 2g/l ou une solution a une concentration en sucre de 2g/l**

Cela signifie que dans 1 litre de cette solution il y a 2 g de sucre

• **Dans 1 litre d'eau on ajoute 3 g de sucre**

Cela signifie que la concentration en sucre de cette solution est de 3g/l

• **Dans 2 litres d'eau on rajoute 3 g de sucre**

Attention, pour connaître la concentration de cette solution en g/l il faut savoir combien il y a de grammes de sucre dans **UN** litre. Si dans 2 litres il y a 3g de sucre, il faut donc diviser par 2 pour connaître cette valeur. $3 : 2 = 1,5$

La concentration de cette solution en sucre est donc 1,5 g/l

• **Une solution a une concentration en sucre de 2g/l. On prélève 4 litres de cette solution. Combien y a-t-il de grammes de sucre dans ces 4 litres**

Dans 1 litre de cette solution il y a 2 g de sucre donc dans 4 litres 4 fois plus
Il y a donc $4 \times 2 = 8$ grammes de sucre dans les 4 litres

• **Une solution a une concentration en sucre de 2g/l. Combien faut-il rajouter de sucre par litre pour que la concentration soit de 6g/l**

Dans 1 litre de cette solution il y a 2 g de sucre donc si on veut que la solution ait une concentration de 6g/l il faut rajouter 4 grammes par litre

• **Une solution a une concentration en sucre de 2g/l. On prélève 4 litres de cette solution. Combien faut-il rajouter de grammes de sucre à ces 4 litres pour avoir un mélange dosé à 6g/l**

Attention le problème est plus complexe.

Dans 1 litre de la solution de départ il y a 2 g de sucre donc dans les 4 litres prélevés il y en a 4 fois plus soit 8 grammes au total. Si on veut un mélange dosé à 6g/l il faudra qu'on ait dans les 4 litres de ce mélange : $4 \times 6 = 24$ grammes de sucre.

On en a pour l'instant 8 grammes il faudra donc en rajouter **16 grammes**

• **Une solution a une concentration en sucre de 2g/l. On prélève 4 litres de cette solution. Combien faut-il rajouter d'eau à ces 4 litres pour avoir un mélange dosé à 1g/l**

Plus on va rajouter d'eau et moins la solution sera concentrée (comme quand on rajoute de l'eau dans un pastis)

La quantité de sucre totale dans les 4 litres est de 8 g et ne va pas changer.

La concentration en gramme par litre se calcule en divisant la quantité de sucre totale du mélange par le nombre de litres.

Concentration = Sucre Total / Nombre de litres (pour l'instant $8/4 = 2$ g/l)

On veut que cette concentration soit de 1g/l

Sucre Total / Nombre de litres total = 1 donc Nombre de litres total = 8. Il faut donc rajouter 4 litres d'eau aux 4 litres qu'on a prélevés.

NE PAS CONFONDRE LA CONCENTRATION (ici en gramme par litre) et LA QUANTITE de SUCRE TOTALE (en grammes) PRESENT DANS PLUSIEURS LITRES DE LA SOLUTION

Une cuve est remplie aux 2/3, il manque 100 litres pour qu'elle soit pleine. Combien y a-t-il d'eau dans la cuve ?

Quelle est la capacité totale de la cuve ?

Si la cuve est remplie aux deux tiers cela veut dire qu'il manque un tiers pour qu'elle soit pleine. On nous dit que 100 litres représentent un tiers du contenu total de la cuve. Donc les deux tiers correspondent à 2 fois 100 litres soit 200 litres. Et la cuve a une capacité totale (trois tiers) de

$$3 \times 100 = 300 \text{ litres}$$

remplissage	1 tiers	2 tiers	3 tiers (totalité)
litres	100	200	300